9.2.7 Nezávislé jevy I

Předpoklady: 9204

Př. 1: Předpokládej, že pravděpodobnost narození chlapce je stejná jako pravděpodobnost narození dívky (a tedy v obou případech rovna 0,5) a není ovlivněna genetickými dispozicemi rodičů. Najdi množinu všech možných výsledků rození dětí v rodinách se třemi dětmi. Urči pravděpodobnosti následujících jevů:
a) Jev A: „nejstarší dítě je hoch“ b) Jev B: „prostřední dítě je dívka“
c) Jev C: „všechny tři děti jsou hoši“
Urči také pravděpodobnosti jevů $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ a $(B \cap C)$. U každého průniku rozhodni, zda je v běžném smyslu možné považovat jevy, ze kterých je sestaven, za nezávislé.

Při sestavování množiny všech výsledků musíme zohlednit:

- potřebujeme znát pořadí dětí, kvůli určení pravděpodobností jevů A a B,
- všechny výsledky by měly být stejně pravděpodobné (což neplatí pro výsledky „dvě dívky a jeden hoch“ a „tři hoši“),

$\Rightarrow$ množinou všech výsledků budou uspořádané trojice z písmen h, d, kde první místo znamená pohlaví prvního dítěte, druhé místo pohlaví druhého, třetí místo třetího.

$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(d,h,h),(h,d,d),(d,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\}$

a) Jev A: „nejstarší dítě je hoch“

$A = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

b) Jev B: „prostřední dítě je dívka“

$B = \{(h,d,h),(h,d,d),(d,d,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) Jev C: „všechny tři děti jsou hoši“

$C = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{8}$

Nezávislé jevy: jevy, které se neovlivňují.

Jev $(A \cap B)$: „první dítě je hoch a prostřední je dívka“

$A \cap B = \{(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Jevy A, B jsou nezávislé, skutečnost, že se jako první narodí chlapec, nemá vliv na pohlaví druhého dítěte.

Jev $(A \cap C)$: „první dítě je hoch a všechny tři děti jsou hoši“

$A \cap C = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8}$

Jevy A, C nejsou nezávislé, protože se nemohou narodit tři hoši bez toho, aby první dítě byl hoch.

Jev $(B \cap C)$: „prostřední dítě je dívka a všechny tři děti jsou hoši“

$B \cap C = \varnothing \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{0}{8} = 0$

Jevy *B*, *C* nejsou nezávislé, protože když bude prostřední dítě dívka, nikdy se nenarodí ze tří dětí tři hoši.

Pravděpodobnost, že „první dítě je hoch a druhé dítě je dívka“ můžeme určit i jinak. Přibližně polovina rodin má jako první dítě hocha a z této poloviny pak polovina rodin má jako druhé dítě dívku $\Rightarrow$ pravděpodobnost jevu $(A \cap B)$ je tedy: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Rozebereme si význam jednotlivých členů: $\frac{1}{2} = P(A)$, $\frac{1}{2} = P(B)$, $\frac{1}{4} = P(A \cap B)$.

Zdá se, že platí vzorec: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Platí tento vzorec i pro jevy *A*, *C*? $P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Podobně vzorec neplatí pro jevy *B*, *C*: $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

Závěr: Zdá se, že pokud jsou dva jevy *A*, *B* nezávislé, pravděpodobnost $P(A \cap B)$ toho, že nastanou oba, získáme jako součin pravděpodobností $P(A)$ a $P(B)$.

Ve skutečnosti je to ještě jinak. „Nemít vliv“ není matematický termín a tak nemůžeme tímto způsobem rozhodovat, zda jsou dva jevy nezávislé. Rozhodnutí je pak možné učinit pouze na základě toho, zda vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ platí nebo ne. $\Rightarrow$ Nejenže pro nezávislé jevy můžeme používat vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ale dokonce platnost tohoto vzorce rozhoduje o tom, zda jevy můžeme považovat za nezávislé.

Řekneme, že jevy *A*, *B* jsou nezávislé, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Př. 2: Ve třetím ročníku gymnázia propadá ve čtvrtletí v průměru 5% studentů z matematiky, 2% studentů z fyziky a 1% studentů z obou předmětů. Rozhodni, zda jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé.

Uvedená procenta vyjádříme jako pravděpodobnosti: $P(M) = 0{,}05$, $P(F) = 0{,}02$, $P(M \cap F) = 0{,}01$.

Dosadíme do vzorce: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F)$.

$0{,}01 \neq 0{,}05 \cdot 0{,}02 = 0{,}001$

Jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ jsou závislé (což není nic překvapivého).

Př. 3: U náhodného pokusu z prvního příkladu rozhodni nejdříve odhadem, poté dosazením do vzorce, zda jsou nezávislé dvojice jevů:
a) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *E*: „třetí se narodí hoch“,
b) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“,
c) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné“.

Určíme potřebné pravděpodobnosti a dosadíme do vzorce.

a) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné", *E*: „třetí se narodí hoch"
Jevy *D* a *E* jsou zřejmě nezávislé.
Jev *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné" .

$D=\{(h,h,h),(h,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Jev *E*: „třetí se narodí hoch".

$E=\{(h,h,h),(h,d,h),(d,h,h),(d,d,h)\} \Rightarrow P(E)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Jev $D\cap E$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a třetí se narodí hoch".

$D\cap E=\{(h,h,h),(d,d,h)\} \Rightarrow P(D\cap E)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Vzorec: $P(D\cap E)=P(D)\cdot P(E) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ jevy *D* a *E* jsou nezávislé.

b) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné", *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné"
Jevy *D* a *F* by mohly být nezávislé.
Jev *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné".

$F=\{(h,h,h),(h,d,h),(d,h,d),(d,d,d)\} \Rightarrow P(F)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Jev $D\cap F$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné".

$D\cap F=\{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D\cap F)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Vzorec: $P(D\cap F)=P(D)\cdot P(F) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ jevy *D* a *F* jsou nezávislé.

c) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné", *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné"
Jevy jsou závislé, pokud není pohlaví prvních dvou dětí stejné, nemohou mít stejné pohlaví všechny tři děti.
Jev *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné".

$G=\{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(G)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Jev $D\cap G$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví všech tří dětí je stejné".

$D\cap G=\{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D\cap G)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Vzorec: $P(D\cap G)=P(D)\cdot P(G) \Rightarrow \frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ jevy *D* a *G* nejsou nezávislé.

Pedagogická poznámka: Žáci sice mají napsanou podmínku pro nezávislé jevy, spočítaný příklad, ale přesto mají tendenci v předchozím příkladu nic neověřovat, spočítat pravděpodobnost průniku součinem a prohlásit jevy za nezávislé.

Dodatek: Podobně jako můžeme určit, zda jsou nezávislé jevy *A*, *B* pomocí vzorce $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, můžeme rozhodnout i o nezávislosti tří jevů *A*, *B*, *C*.
Jevy *A*, *B*, *C* jsou nezávislé, právě když jsou nezávislé:
a) každé dva z nich ($\Rightarrow$ platí vzorce $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$ a $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$),
b) všechny tři jevy dohromady ($\Rightarrow$ platí vzorec

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$).

Analogicky je možné určovat nezávislost více jevů než tří.

Př. 4: Házíme modrou a bílou kostkou. Číslo, které padne na modré kostce, značíme *m*, číslo na bílé kostce *b*. Rozhodni, zda jsou nezávislé jevy:

a) jev *A*: $m+b=7$ a jev *B*: $m=3$, b) jev *C*: $m+b=9$ a jev *D*: $m=4$,

c) jev *C*: $m+b=9$ a jev *E*: $m>3$, d) jev *F*: $m+b=11$ a jev *G*: $m \neq 5$.

Při hodu rozlišujeme barvy kostek $\Rightarrow$ množinou všech možných výsledků bude množina všech uspořádaných dvojic čísel 1 až 6.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{matrix} \right\}$$

a) jev *A*: $m+b=7$ **a jev *B*:** $m=3$

$P(A)$: možnosti, jak získat součet 7: $7=4+3 \Rightarrow 2$ možnosti, $7=5+2 \Rightarrow 2$ možnosti, $7=6+1 \Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(B)$: možnosti, kde $m=3$: celý třetí řádek tabulky $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(A \cap B)$: možnosti, jak získat součet 7 a $m=3$: jediná možnost $(3;4)$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy *A*: $m+b=7$ a *B*: $m=3$ jsou nezávislé.

b) jev *C*: $m+b=9$ **a jev *D*:** $m=4$

Zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě.

$P(C)$: možnosti, jak získat součet 9: $9=4+5 \Rightarrow 2$ možnosti, $9=6+3 \Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow$ $P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

$P(D)$: možnosti, kde $m=4$: celý čtvrtý řádek tabulky $\Rightarrow$ 6 možností $\Rightarrow$ $P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$P(C \cap D)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m=4$: jediná možnost $(4;5)$ $\Rightarrow$ $P(C \cap D) = \frac{1}{36}$.

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C) \cdot P(D) = P(C \cap D)$.

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy *C*: $m+b=9$ a *D*: $m=4$ nejsou nezávislé $\Rightarrow$ někdy je doopravdy těžké dopředu odhadnout, zda jsou jevy závislé či ne.

c) jev *C*: $m+b=9$ a jev *E*: $m>3$

$P(E)$: možnosti, kde $m>3$: celý čtvrtý, pátý a šestý řádek tabulky $\Rightarrow$ 18 možností $\Rightarrow$

$P(E)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

$P(C\cap E)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m>3$: tři možnosti $(4;5)$, $(5;4)$, $(6;3)$ $\Rightarrow$

$P(C\cap E)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C)\cdot P(E)=P(C\cap E)$.

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\neq\frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ jevy *C*: $m+b=9$ a *E*: $m>3$ nejsou nezávislé.

d) jev *F*: $m+b=11$ a jev *G*: $m\neq 5$

$P(F)$: možnosti, jak získat součet 11: $11=6+5\Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow$ $P(F)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

$P(G)$: možnosti, kde $m\neq 5$: všechny řádky tabulky kromě pátého $\Rightarrow$ 30 možností $\Rightarrow$

$P(G)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

$P(F\cap G)$: možnosti, jak získat součet 11 a $m\neq 5$: jediná možnost $(6;5)$ $\Rightarrow$

$P(F\cap G)=\frac{1}{36}$.

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(F)\cdot P(G)=P(F\cap G)$.

$\frac{1}{18}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{108}\neq\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy *F*: $m+b=11$ a *G*: $m\neq 5$ nejsou nezávislé.

Dodatek: Skutečnost, že jevy *A*, *B* v bodu a) jsou nezávislé je velmi překvapivá. Na první pohled se zdá, že padnutí 3 na modré kostce musí zvětšit pravděpodobnost, že padne součet 7, protože 3 modré kostce je podmínkou jedné z dvojic, které k součtu 7 vedou.
Když si vypíšeme všechny možnosti jak součet sedm dosáhnout: $(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)$ vidíme, že pro každou možnost, která padne na modré kostce, existuje právě jedna možnost, co může padnout bílé kostce, aby se součet rovnal 7. Skutečnost, že padne libovolné číslo na modré kostce tak nijak neovlivňuje pravděpodobnost toho, že na obou kostkách dohromady padne součet 7. Ve všech případech je pravděpodobnost součtu 7 rovna $\frac{1}{6}$ (tedy pravděpodobnost toho, že na červené kostce padne jedno konkrétní číslo, které potřebujeme k tomu, abychom dosáhli součtu 7).

Př. 5: Petáková:
strana 172/cvičení 32
strana 172/cvičení 34

Shrnutí: Dva jevy jsou nezávislé právě tehdy, když pravděpodobnost toho, že nastanou oba najednou, se rovná součinu pravděpodobností, že nastane každý z nich.